CAPÍTULO 7: DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LA NUMERACIÓN Y EL CÁLCULO

1. INTRODUCCIÓN

Aunque el conocido manual DSM-IV de la Asociación Americana de Psiquiatría señala que sólo el 1% de los niños en edad escolar sufre un *trastorno específico* relacionado con el aprendizaje del cálculo, que se pondría especialmente de manifiesto en 2º y 3er grado, lo cierto es que las matemáticas constituyen a menudo la piedra de toque del "fracaso escolar", especialmente en la Etapa Secundaria: la mayor parte de los estudios internacionales señalan que entre un 40% y un 60% de los estudiantes de esta etapa no llega a alcanzar un nivel funcional mínimo en matemáticas para responder a las demandas y exigencias del entorno social.

Siendo así, no es extraño que las matemáticas se perciban habitualmente como una especie de *misión imposible* para la mayoría de la población, ni que su estudio genere sentimientos de ansiedad, frustración y actitudes negativas hacia la escuela en un importante sector del alumnado... al tiempo que la mayoría de los especialistas en el tema ponen de relieve que no estamos tanto ante un fenómeno masivo de dificultades "de aprendizaje", como ante las consecuencias de una enseñanza "manifiestamente mejorable", incluso si nos referimos específicamente al caso de los niños y niñas cuyas dificultades se han analizado tradicionalmente desde el concepto de «discalculia».

Y es que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas no pueden reducirse en ningún caso a variables del alumno, incluso cuando éstas juegan un papel central en el problema, ni mucho menos dentro de tales variables la cuestión puede reducirse, como a veces se pretende, ni a fallos en el desarrollo de ciertos procesos neuropsicológicos, ni a limitaciones en el "razonamiento lógico". Los objetivos de la educación matemática básica son tan amplios, que las eventuales dificultades sobrepasan con creces las posibilidades explicativas de tan restrictivas interpretaciones, ya que se trata de:

a) Posibilitar que cada alumno desarrolle la comprensión y destrezas matemáticas exigidas para la vida adulta, teniendo en cuenta las dificultades que algunos puedan experimentar para una comprensión adecuada.

b) Proporcionar al alumno las bases matemáticas necesarias para el estudio de otras materias.

c) Desarrollar actitudes positivas hacia las mismas, considerando el papel relevante que han tenido y seguirán teniendo en el desarrollo científico y tecnológico de nuestra civilización.

d) Concienciar al alumno de que las matemáticas constituyen un medio eficaz para explorar, crear y acomodarse al mundo actual.

Dicho de otro modo, la educación matemática básica se orienta tanto a desarrollar una serie de actitudes intelectuales, como a adquirir un conocimiento declarativo y el dominio de ciertas herramientas sin los que, hoy por hoy, es absolutamente imposible participar de forma activa e inteligente en la sociedad, y es desde esta perspectiva global, sin reduccionismos, desde donde creemos que debe abordarse la cuestión de la evaluación psicopedagógica de las dificultades de aprendizaje en este área, aun cuando para encarar tanta complejidad no podamos contar, por el momento al menos, con la cantidad de investigación psicológica y pedagógica (y, por tanto, de conocimiento sólido y fiable) de que disponemos con respecto a, por ejemplo, la enseñanza y el aprendizaje de la lengua escrita.

2. LOS APRENDIZAJES MATEMÁTICOS.

Dada la complejidad que, como acabamos de apuntar, caracteriza al área matemática, el primer paso en un capítulo como éste debe ser clarificar el contenido al que vamos a referirnos, diferenciando entre los distintos tipos de aprendizajes que se incluyen en ella.

Aunque las clasificaciones más habituales suelen dividir tales aprendizajes en ocho grandes categorías (*numeración, cálculo, resolución de problemas, estimación, uso de instrumentos tecnológicos, fracciones y decimales, medida y geometría*), en la medida en que éstas no son en absoluto independientes entre sí, sino que mantienen estrechas relaciones, incluso de tipo jerárquico, creemos que pueden reducirse a tres grupos básicos: (1) aprendizaje de las *nociones y procesos básicos* que se encuentran en la base de los aprendizajes aritméticos y geométricos; (2) aprendizaje de la *numeración* y del *cálculo;* y (3) aprendizaje de la *resolución de problemas*.

2.1. Nociones y procesos básicos.

Con esta expresión nos referimos a toda una serie de conceptos y de procesos mentales que suelen caracterizar, en líneas generales, los logros matemáticos propios de la Etapa Infantil, aunque en muchos casos su consolidación se retrase hasta el Primer Ciclo de la Enseñanza Primaria. Nos estamos refiriendo, por tanto, a los siguientes contenidos:

(A) Conceptos básicos.

Los conceptos básicos son denominados así, según A. Boehm, porque constituyen nociones elementales que sirven de base para otros aprendizajes conceptuales más complejos y porque, al mismo tiempo, son expresiones verbales de uso frecuente en la interacción comunicativa en el aula, de modo que la comunicación profesor-alumno se ve gravemente interferida cuando este último no los domina, al menos desde el punto de vista comprensivo.

Aunque esa comunicación se ve favorecida o dificultada por todos los conceptos básicos (dimensionales, espaciales, temporales, cuantificadores...), en relación con los aprendizajes matemáticos se suele destacar habitualmente el papel central de los denominados *cuantificadores*, o conceptos básicos de cantidad, que constituyen formas evolutivamente anteriores al número en la codificación de la cantidad. En general, se trata de conceptos *aproximativos* (mucho/poco, nada/todo, algunos/ninguno...) y *comparativos* (más que, menos que, tantos como, ...), pero se incluyen también en esta categoría las transformaciones relacionadas con las operaciones manipulativas que puedan realizarse afectando a la cantidad (poner, quitar, añadir, repartir, etc).

No obstante, los cuantificadores no son los únicos conceptos básicos relevantes para los aprendizajes matemáticos; también son fundamentales los conceptos básicos *espaciales* (delante/detrás, arriba/abajo...) y *temporales* (antes/después, primero, segundo, tercero, ni primero ni último...), que constituyen la expresión verbal del nivel de desarrollo de la organización espacio-temporal a partir de la cual el niño puede afrontar al menos ciertos aspectos de la noción de número, de las operaciones aritméticas y, sobre todo, los aprendizajes relacionados con la geometría.

Evidentemente, la incidencia de las dificultades de adquisición de los conceptos básicos es mucho mayor en los primeros años de la escolaridad básica que en momentos posteriores, pero no es tampoco infrecuente, en absoluto, encontrar alumnos y alumnas de niveles educativos superiores que, en el marco de otra serie de problemas, no usan de manera precisa dichos conceptos. Tanto es así, que programas de mejora del funcionamiento intelectual como el P.E.I., ideados para alumnos de 12 a 14 años, incluyen como contenidos específicos el desarrollo de la capacidad de ordenación del tiempo y el espacio, además de otros destinados a la automatización del procesamiento de las series numéricas.

(B) Operaciones lógico-matemáticas.

Desde los modelos de enseñanza y aprendizaje derivados de las teorías psicogenéticas (básicamente, de la de Piaget), se ha puesto de relieve que los problemas que a veces experimentan los alumnos en el desarrollo de las operaciones lógico-matemáticas (especialmente de clasificación y seriación), de la noción de conservación o de la comprensión de la reversibilidad, entre otras características del *pensamiento operatorio*, interfieren con la adquisición de la noción de número y del sistema de numeración, ya que se trataría de adquisiciones evolutivamente previas y base psicogenética para la posterior construcción de estos últimos aprendizajes.

Como sabemos, concretamente, la tesis fundamental que se sostiene es que las *operaciones lógicas* de clasificación y seriación son el fundamento de la noción de número, en la medida en que ésta sería el resultado de la síntesis entre la cardinalidad y la ordinalidad... Una síntesis que sólo sería posible como consecuencia de un proceso genético de construcción de la noción de conservación de la cantidad.

El argumento central en este planteamiento es, por tanto, que los aprendizajes matemáticos elementales se basan en la construcción de un tipo de pensamiento lógico a partir de las formas "prelógicas" del pensamiento intuitivo, sugiriendo que los procesos mentales prerrequisitos para una correcta iniciación en las matemáticas serían:

- La capacidad para retener mentalmente un objeto no presente o transformado (conservación del objeto).
- La capacidad para representarse mentalmente una sustancia (masa, volumen o cantidad) cuando ésta esté ausente o, estando presente, sufra variaciones con respecto a su estado inicial (conservación de la sustancia).
- La capacidad para representarse mentalmente el proceso inverso a una transformación observada (reversibilidad del pensamiento).
- La capacidad para formar clases agrupando los objetos en función de ciertas características específicas o generales (clasificación).
- La capacidad para jerarquizar mentalmente las agrupaciones de dichas realidades (inclusión).
- La capacidad de ordenar mentalmente las realidades (seriación).
- La capacidad de asociar mentalmente procesos o agrupaciones iguales (correspondencias).
- La capacidad de asociar mentalmente procesos o agrupaciones iguales generando una nueva (transitividad).

En resumen, podemos decir que desde las posiciones psicogenéticas se afirma que la adquisición del número está precedida por:

a) La comprensión de los conjuntos que implicaría el uso implícito, o no, del principio de correspondencia que incluiría los principios de conservación (del objeto y la substancia), clasificación e inclusión.

b) La compresión de las relaciones de orden entre los objetos supondría el uso implícito, o no, del principio de seriación.

Aunque estas adquisiciones presuntamente previas a la comprensión del número constituyen un referente presente en la gran mayoría de las monografías sobre las dificultades del aprendizaje matemático entre los 5 y los 10 años , lo cierto es que su importancia real suele ser minimizada en los planteamientos más recientes, que consideran más que discutible su valor como sustento (no digamos ya prerrequisito) en la adquisición de la noción de número, ya que ésta parece asociarse más bien a las experiencias infantiles de «conteo», así como a la realización de actividades, escolares o no, que tienen que ver con la verbalización de la cuantificación de la realidad que rodea a los niños, como tendremos ocasión de comentar dentro de un momento

2.2. La noción de número y el sistema numérico.

Aunque es bastante corriente que la noción de número y el sistema numérico (noción de número, valor posicional de las cifras, etc.) se enseñe en nuestras escuelas con cierta independencia de los símbolos que expresan relaciones entre números (<, >, =, +...) y que, por tanto, tiendan a considerarse aprendizajes separados, diferentes, desde nuestra perspectiva se trata de aprendizajes profundamente relacionados entre sí, sobre todo por el nivel de representación que exigen del sistema cognitivo, de modo que en este apartado incluiremos unos y otros.

(A) Adquisición de la noción de número.

Como acabamos de señalar hace un momento, frente a lo defendido por las teorías psicogenéticas, la adquisición de la noción de número no parece que sea un proceso de todo o nada, producto de una reestructuración constructiva que tenga lugar gracias a la aparición de un nuevo tipo de pensamiento lógico en el desarrollo infantil (o lo que es lo mismo, resultan imprescindibles la ejecución de las llamadas operaciones "prelógicas": conservación, correspondencia y seriación); bien al contrario, hoy existe un relativo consenso, sobre que la adquisición de la noción de número, considerándose como el resultado de un proceso gradual, una adquisición progresiva relacionada con la experiencia de atender a las cantidades de las cosas a través del "conteo" y de las actividades asociadas al mismo. Para algunos autores tales experiencias de conteo ponen de manifiesto que el aprendizaje de la numeración implica la elaboración de 5 principios por parte del niño:

1) Principio de correspondencia uno a uno: Aparece cuando el niño coordina el proceso de participación (mantener en mente dos grupos de objetos: los contados y los aún por contar) y el proceso de etiquetación (utilización del nombre de los números para hacer corresponder cada nombre con un objeto contado). Aquí aparece el conocimiento del nombre de los números, pero está claro que ese nombre no conlleva el «concepto» de número.

2) Principio de orden estable: Este principio, cuando aparece, establece que para contar es indispensable establecer una secuencia de «palabras numéricas» (nombre de números) estable y coherente, no supone que la secuencia empleada sea la convencional (uno, dos, tres, cuatro, etc.), pero sí es ya, al menos, siempre la misma, cosa que no ocurría antes.

3) Principio de cardinalidad: La noción de cardinal aparece cuando el niño comprende que la última «palabra numérica» de su secuencia de recuento significa el número total de elementos del conjunto contado, y no es sólo el nombre del último de ellos.

4) Principio de abstracción: Aparece cuando, en el proceso que describimos, el niño comprende que los números simbolizan una cualidad abstracta, que no depende en absoluto del aspecto físico de los objetos; los principios anteriores se aplican entonces tanto a conjuntos de objetos homogéneos como heterogéneos.

5) Principio de irrelevancia de orden: El proceso culmina cuando el niño comprende que el orden de enumeración es del todo irrelevante para determinar el cardinal de un conjunto, ese conjunto se puede enumerar de cuantos modos se desee y, pese a todo, el cardinal del conjunto será siempre el mismo. Este principio supone:

- Comprender que lo contado son cosas distintas a los números que se les aplican al enumerarlos.

- Comprender que las «palabras numéricas» se aplican arbitrariamente a los elementos del conjunto porque son cosas distintas a ellos.

- Que el mismo número cardinal resulta siempre de los distintos tipos de recuento posible, ya que es independiente del orden del conteo y constituye una propiedad cuantitativa del conjunto.

La mayoría de los niños de cuatro a cinco años memorizan la secuencia numérica progresivamente (0,1,2,3,...) y regresivamente (10,9,8,...) a través de los medios informales en que se desenvuelven. Si el aprendizaje no se ha producido a esta edad es preferible practicar en la adquisición de la habilidad de contar que dirigir los esfuerzos al desarrollo de operaciones lógicas y los conceptos básicos, contrariamente a lo que indican los modelos piagietianos, aunque ambos procedimientos pueden simultanearse.

Como señala Martínez Montero, existen determinados ejercicios que facilitan la comprensión de la noción de número más que otros, como pueden ser:

a) Actividades de *reparto* (*dealing*), que permiten establecer diverso tipo de correspondencias entre dos conjuntos de objetos y que irían desde la correspondencia *uno a uno* (por ejemplo, un lápiz para cada niño), pasando por reparto *uniforme* (a cada elemento le corresponde la misma cantidad, por ejemplo, 6 entre 3, entre 2; etc.), reparto *irregular* (por ejemplo, repartir de todas las formas posibles 4 lápices para 2 alumnos), reparto proporcional (por ejemplo, dar 2 lápices a Juan por cada uno que le demos a José), hasta el reequilibrio de repartos (por ejemplo, volver a repartir 8 lápices entre 2 alumnos habiéndolos repartidos previamente entre 4)

b) Actividades de *mezcla de códigos*: en este tipo, el alumno habría de cardinalizar las cantidades de diversas maneras (por ejemplo, 2, II, @@, etc.).

c) Actividades con la *cadena numérica*: se trataría de identificar los números que se encuentran definidos por una posición, para lo que puede utilizarse la recta numérica (por ejemplo: Cuenta hasta el 7; cuenta 5 números a partir del 3; ¿Cuántos números hay entre el 4 y el 8?;...).

Para finalizar este comentario sobre el aprendizaje de la numeración nos gustaría precisar que, aun cuando en la asimilación de los conceptos examinados resulta útil, si no necesario, el uso y manipulación reiterados de materiales concretos (objetos de la vida real, bloques lógicos, regletas...), no es la experiencia en sí lo que realmente parece contar: manipulación y vivenciación son útiles en la medida en que propician la formación de representaciones mentales que darán significado a las nociones aritméticas al irse elaborando por el alumno, primero en forma de "conceptos" intuitivos (a través de la representación gráfica figurativa) y luego en forma de auténticos conceptos matemáticos, que tienen un marcado carácter simbólico.

(B) El sistema de numeración.

Aunque las dificultades relacionadas con la adquisición de la noción de número son importantes y frecuentes durante toda la Primaria (una etapa en donde un importante número de alumnos no llegan a elaborar los principios citados de cardinalidad, abstracción e irrelevancia de orden), no son las únicas; bien al contrario, son aún más frecuentes las dificultades en la comprensión del carácter «ordenado» del sistema de numeración y la *lógica* del sistema decimal, que implica reagrupaciones a partir de unidades secundarias: decenas, centenas... como lo pone de manifiesto, por ejemplo, el tipo de errores más comunes en el cálculo en estas edades.

Si nos estuviésemos refiriendo a una comprensión matemática profunda de la naturaleza del sistema decimal, evidentemente, este fenómeno no sería extraño, pero lo es cuando consideramos que el problema incluye la falta de una comprensión meramente «intuitiva» de estas nociones, entendiendo por ello que el alumno disponga de representaciones mentales concretas de estas nociones, como «imaginar» la decena como una bolsita, caja, etc. que contiene10 unidades, la centena como una colección de diez «bolsitas» que contienen 10 unidades cada una y así, sucesivamente.

Por supuesto, esta dificultad *conceptual* corre pareja con otras de tipo procedimental, que se derivan directamente de no entender el valor posicional de las cifras, es decir, que 7 representa cantidades diferentes según su posición (7, 70, 700,...), como son no comenzar los cálculos escritos desde la derecha o fallar con las "llevadas", por ejemplo; asimismo, no comprender la naturaleza del sistema de numeración lleva a dificultades en la comprensión y manejo de los decimales, las fracciones, etc.

Para llegar al dominio del sistema decimal resulta fundamental el que el alumno realice y establezca particiones, agrupaciones y relaciones entre los diferentes elementos constitutivos de un número. De esta manera, las actividades que facilitarían el dominio del sistema decimal serían:

a) Actividades de *partición* de un número. Resaltando dicho autor la importancia que tiene el que las descomposiciones que se realicen tengan carácter múltiple (p.e.: 24 se puede descomponer en 20 + 4; en, 10 + 10 + 10 +4; ...).

- *Consideración simultánea de las unidades* de un número (p.e.: ¿Cuantas decenas existen en 3214? ¿Cuántas centenas? ¿Cuántas unidades de millar?

- *Descomposición* de un número en sus unidades constitutivas (unidades, decenas, centenas,...)

- Dada una parte de un número, hallar la otra.

b) Actividades de *agrupación*, que pretenden que el alumno componga un número a partir de sus unidades constitutivas, como:

- Composición de un número a partir de sus unidades.

- Operaciones mixtas de sumar.

c) Actividades de *relación*, que se refiere a las relaciones que se establecen entre las cifras que componen un número. Las actividades que pueden hacerse son:

- Composición de todos los números posibles.

- Determinación de los números mayores y menores que pueden componerse con cifras dadas.

A todas ellas podemos añadir las relativas a diferentes sistemas de numeración, como:

- Identificar números números realizados en una base diferente a la decimal.

- Leer y escribir números en sistemas diferentes al decimal.

Entre los problemas más frecuentes relacionados con la numeración, nos encontramos con los siguientes:

- Dificultad para adquirir la noción de número (comprensión)

- La dificultad para reconocer y escribir algunos números.

- La dificultad en la adquisición de los órdenes de unidades y el valor proposicional de los números, por ejemplo, el número 25 se lee veinticinco, y no dos y cinco.

- La dificultad en la adquisición de la regla de los ceros intermedios, por lo difícil que resulta comprender los órdenes de unidades y las reglas para codificar y decodificar las relaciones entre dichas cifras.

A pesar de la insistencia de numerosos autores sobre la necesidad de realizar actividades diversas, como las indicadas por Martínez Montero, para la comprensión y dominio del sistema de numeración, en nuestra opinión, una cuestión básica es que dichas actividades se planteen con un nivel de abstracción (manipulativo-vivencial, gráfico o simbólico) adecuado a las competencias del sujeto, ya que en caso contrario las dificultades pueden mantenerse en lo relativo a la comprensión del mismo, aunque pueda aprender determinados algoritmos de identificación de unidades.

Cuando se procede a evaluar el dominio de la numeración por parte de un alumno es preciso tener en cuenta las siguientes consideraciones:

a) En primer lugar, es necesario subrayar que el uso de los números (contar) no significa que se posea la noción de número. Ya que la comprensión de la noción de número se pone de manifiesto a través de la ejecución correcta de actividades como:

- Completación/continuación de series ascendentes y descendentes de números.

- Identificación de los números "vecinos" de otro dado.

b) La comprensión del sistema numérico decimal no puede comprobarse mediante la ejecución de las actividades de descomposición habituales (p.e.:?Cuántas unidades, decenas y centenas tiene el número 234¿) ya que el alumno puede aplicar un algoritmo de identificación que no implique la comprensión del valor posicional, por ello será necesario utilizar actividades como:

- Consideración simultánea de las unidades de un números.
- Actividades de composición

Para finalizar, queremos resaltar el papel preponderante que tiene en el dominio del sistema de numeración los conocimientos previos que el sujeto posea en un momento determinado.

2.3. El cálculo numérico.

A los aprendizajes anteriores, en la Etapa Primaria se le deben añadir aquellos otros que afectan específicamente a la correcta adquisición de las operaciones de cálculo aritmético, aunque es preciso distinguir distintas dificultades en relación con esta nueva faceta.

(A) Comprensión de las operaciones.

La primera tiene que ver con la comprensión de los conceptos mismos de suma, resta, multiplicación, división, potencias, raíces, etc., que son a menudo asimiladas en términos puramente algorítmicos, es decir, como procedimientos mecánicos que se aplican rutinariamente para la obtención de un resultado.

No olvidemos en este sentido, que el propio término «operaciones» trata de expresar que nos encontramos ante «acciones interiorizadas» que conforman un sistema de relaciones lógico-matemáticas entre ellas: sólo así es posible realizar una adquisición comprensiva de las propiedades de cada una de ellas (que suelen estudiarse de manera absolutamente desconectada de las operaciones reales mismas) y, sobre todo, emplear ese conocimiento en la resolución de problemas y, más adelante, en la realización de aprendizajes matemáticos más complejos y de nivel jerárquico superior.

Lo cierto es que este aprendizaje no suele constituir motivo de consulta al orientador escolar porque, generalmente, el propio profesorado de la etapa no considera su enseñanza como algo importante o, al menos, al alcance de sus alumnos y alumnas; causa más preocupación, entonces, otro tipo de problemas más relacionados con una insuficiente automatización de cálculo, hábitos incorrectos de resolución de las operaciones escritas, etc...

(B) La “mecánica” de las operaciones aritméticas.

Con este expresión queremos referirnos a uno de los problemas más frecuentes en los primeros años de la escolaridad obligatoria; en concreto, incluimos aquí la persistente tendencia a realizar los cálculos escritos en órdenes inadecuados (sumar y restar comenzando desde la columna situada a la izquierda, multiplicar sin ordenar el producto de cada multiplicación -cuando el multiplicador tiene dos o más cifras- comenzando por dejar libre la columna de la derecha, etc.), los errores de cálculo derivados de imprecisiones en la suma, resta, multiplicación o división de dos cifras, inexistencia o imprecisión en el cálculo mental, etc. En definitiva, un conjunto de errores que suelen relacionarse con:

- las dificultades ya comentadas,
- la falta de una práctica suficientemente bien supervisada,
- la falta de atención, y
- la inexistencia de estrategias de verificación en el desarrollo de tareas que se ejecutan mecánicamente, aplicando una secuencia de pasos impuestos sin explicación y memorizada sin más.

El dominio de las cuatro operaciones básicas (sumar, restar, multiplicar y dividir) es uno de los objetivos de la enseñanza elemental, al igual que otros cálculos más complejos (potencias, raíces, logaritmos...) lo son de la educación matemática de la Educación Secundaria.

En relación con las llamadas operaciones básicas, según algunos autores, antes de ser iniciados en el cálculo escrito de estas cuatro operaciones, los niños deben adquirir los conceptos y los símbolos de las mismas. Y también, el aprendizaje de los algoritmos, es decir, procedimientos de cálculo compuestos por una secuencia ordenada de pasos que permiten llegar a la solución correcta en operaciones con multidígitos.

A partir de las experiencias informales y formales de contar, los niños van elaborando los conceptos básicos de adición, sustracción, multiplicación y división, así como los algoritmos para su resolución.

En la *suma* se utilizan estrategias que van desde el apoyo de los dedos u objetos físicos al uso de las combinaciones numéricas básicas, pasando por los algoritmos de cálculo escrito y por las estrategias y reglas de cálculo mental que se apoyan en la composición y descomposición de los números (por ejemplo, para calcular 5 + 3, se usa la estrategia de sumar 5 + 5 quitando 2), produciéndose los errores más frecuentes con las «llevadas», en la alineación o colocación correcta de las cifras y en los procedimientos de llevada cuando está presente el cero.

Para la *sustracción* , los niños también desarrollan y aplican estrategias que varían en función de los problemas a resolver, del grado de abstracción de la tarea y de la edad. La sustracción, en general, al suponer mayor nivel de complejidad, no es dominada hasta tercero o cuarto de Primaria. La comprensión de esta complejidad y el dominio de las estrategias de resolución no es un proceso de todo o nada, sino que supone la ascensión gradual de un camino no exento de dificultades.

Si se tiene bien adquirido el concepto de adición, el de la *multiplicación* no presenta grandes dificultades, ya que la multiplicación se representa como la adición sucesiva del mismo número. Los errores más frecuentes están relacionados con las combinaciones básicas, con la suma de los números que se llevan, con la escritura de una hilera de ceros cuando hay un cero en el multiplicador, con los errores en la adición y al tomar el multiplicando como multiplicador.

En cuanto a la *división*, al ser la operación inversa a la multiplicación implica una reorganización de este concepto, cuyo resultado final debe ser una estructura de conocimiento aritmético unificada que incluya las cuatro operaciones. Ello significa la consolidación de una red de conexiones entre los diferentes conceptos aritméticos, que es la que permitirá su aplicación flexible. En cualquier caso, el aprendizaje de la división es el más difícil de todos los algoritmos:

-porque se lleva de izquierda a derecha, al contrario que los anteriores,

-porque aporta dos resultados, cociente y resto; en los anteriores sólo uno,

-porque requiere que los otros algoritmos estén automatizados, y

-porque es un procedimiento sólo semiautomático, ya que tiene una fase de tanteo que conlleva ciertas probabilidades como que el resto sea mayor que el cociente.

Estos errores suelen tener su origen en un mal aprendizaje, de manera que, cuando algunos de los pasos del procedimiento no están claros, el niño inventa una regla, generalmente inadecuada, para resolver la situación. Así, los errores más frecuentes en las operaciones básicas de los alumnos con DAM (Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas), son:

- operar sin tener en cuenta la posición,
- operar de izquierda a derecha,
- omitir el cero y
- errores con las llevadas,

sosteniendo como principio general que la mayoría de los errores se producen por una inadecuada o incompleta asimilación del valor posicional de los números.

Cuando las dificultades aparecen en otras operaciones matemáticas más complejas (como las potencias, raíces, logaritmos, etc.), a menudo los orígenes suelen remontarse, de un lado, a un inadecuado dominio de las operaciones básicas implicadas (estas operaciones siempre suponen el dominio de las operaciones básicas) y, de otro, a un inadecuado aprendizaje del algoritmo correspondiente de otro.

(C) Errores conceptuales en el cálculo.

Con esa tercera categoría de dificultades nos referimos a todos aquellos errores que se derivan de la inexistencia de los conceptos adecuados. Posiblemente, el más frecuente de ellos tenga que ver con las habitualmente denominadas «restas con llevada», es decir, cuando en la sustracción nos encontramos con que la cifra del sustraendo en una posición dada (unidades, decenas, centenas,...) es mayor que la correspondiente en el minuendo; en este caso, no existen problemas si el alumno comprende, aunque sea *intuitivamente*, que el «déficit» de esa determinada posición en el minuendo desaparece cuando trasladamos a él una «unidad secundaria» de la posición siguiente (es decir, para restar 9 a 27, este último 7 se aumenta hasta 17, pero ello implica que ya sólo queda un decena, en lugar de dos, en la siguiente columna). Cuando tal comprensión no existe, el alumno se ve entregado a practicar un ritual incomprensible y arbitrario de «préstamos entre vecinos» sujeto a una secuencia de actos que, en cuanto falla en cualquier eslabón, condena al error.

Otro tanto cabe decir de las dificultades para el cálculo con números fraccionarios, la obtención de porcentajes, etc. o la realización de operaciones más complejas.

(D) Lectura y escritura de símbolos numéricos.

La expresión símbolos numéricos escritos incluye, en el sentido que aquí se le da, tanto a los números propiamente dichos como a los símbolos de las operaciones numéricas (+, -, x, /) y aquellos otros que representan relaciones matemáticas esenciales (=, =, >, <, ...). Evolutivamente, se adquiere antes el reconocimiento de estos símbolos y el acto de nombrarlos que su escritura, siendo relativamente lento el proceso que permite al niño terminar por leer y escribir los signos y los números, lo que implica el aprendizaje, además, del valor posicional de estos últimos.

Este tipo de error ha sido investigado bastante en la historia del trabajo sobre dificultades del aprendizaje matemático, ya que es muy evidente su presencia, que ha ido asociada tanto a trastornos específicos (lesiones cerebrales con efecto sobre las adquisiciones matemáticas), como a dificultades evolutivas, que serían las más frecuentes en la escolaridad obligatoria, el la cual aparecen con abundancia -en particular en el primer ciclo de primaria- los fallos en la identificación de los números, confusiones entre números semejantes, confusión en la lectura de los signos de operación y, sobre todo, de relación, escritura «en espejo» de números, cambios posicionales de cifras, omisiones de números, etc.

Respecto a la incidencia de dificultades en este tipo de aprendizajes, hay que decir que aparecen como algo muy corriente durante la fase de iniciación de los alumnos en numeración y cálculo aritmético, persistiendo a veces hasta los 8 ó 10 años en alumnos de medios desfavorecidos e, incluso, en grupos-clase completos que han sufrido una enseñanza inicial irregular.

Se trata, pues, de un fenómeno *natural* en ciertos momentos del proceso de aprendizaje matemático; más allá de ese punto, sin embargo, son errores que no suelen persistir sino en sujetos con discalculia asociada a trastornos específicos de la lecto-escritura, así como en algunos alumnos impulsivos e hiperactivos.

La evaluación del nivel de competencia de un sujeto respecto a las operaciones aritméticas, es necesario diferenciar su comprensión de su dominio algorítmico. La evaluación de este último, puede realizarse con una colección de ítems relativos a cada operación y secuenciados en orden de dificultad, como por ejemplo la siguiente referida a la suma:

- Sumas de dígitos que totalizan menos de 10 (p.e.: 7 + 2).

- Sumas de números con dos cifras sin "llevadas" (p.e.: 27 +11).

- Sumas de dos números de una y dos cifras, "sin llevadas"(p.e.: 12+7).

- Sumas de dos dígitos rebasando la decena (p.e.: 6 + 9).

- Sumas de tres dígitos:

  a) Sin rebasar la decena (p.e.: 3 + 4 + 2)

  b) Rebasándola en el tercer sumando (p.e.: 3 + 5 + 3).

  c) Rebasándola en el segundo solamente.

- Etc.

Este tipo de colecciones, que resulta fácil elaborar una el automatismo de cada operación básica, conforman lo que se denomina una prueba analítica, que nos permite chequear en poco tiempo, y de manera sistemática, los distintos logros y errores de un alumno o alumna.

A la hora de evaluar el dominio de las operaciones aritméticas por los alumnos es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

a) En la valoración de cada operación es necesario diferenciar su comprensión del dominio algorítmico que se posea de la misma, ya que pudiera ocurrir que un alumno poseyera uno y no el otro.

b) Se deben emplear diferentes modelos de operaciones: verticales y horizontales.

2.4. Resolución de problemas.

En cuanto a la resolución de problemas, aunque no lo parezca a veces, está claro que constituye uno de los objetivos finales en la enseñanza de las matemáticas en la escuela obligatoria, para cuya consecución no basta con que el alumno domine las operaciones elementales de cálculo: requiere un aprendizaje específico de ciertas habilidades de representación, reglas y estrategias generales y específicas, así como de la capacidad de *traducir* de unos lenguajes (modos de representación) a otros.

Además de todo ello, el aprendizaje de esta capacidad incluye la comprensión de los enunciados, que exige la decodificación adecuada del mensaje verbal para formarse una representación mental adecuada al estado de cosas descrito en el problema, y la habilidad para establecer relaciones entre los conceptos y procedimientos implicados para, desde ahí, analizar las vías de solución posibles en cada caso y valorar cuál de ellas es la apropiada.

En cualquier caso, para entender el modo en que el alumno llega a aprender a resolver correctamente los problemas matemáticos (o por qué no llega a hacerlo), es necesario analizar el concepto mismo de problema y el conjunto de operaciones mentales implicadas en su resolución.

Así, comenzaremos señalando que un problema puede considerarse, en general, como una situación en la que a partir de un cierto estado de cosas inicial se trata de alcanzar una meta identificando y aplicando el único procedimiento adecuado o seleccionando uno entre varios posibles; en este sentido, podría afirmarse que existe un problema siempre que la situación actual sea diferente de la situación (meta) deseada... Por ejemplo, si queremos tomar una copa de vino de una botella cerrada, hemos de resolver el problema de abrirla.

Resolver un problema, por tanto, comporta pasar de una situación a otra, realizar ciertas operaciones sobre el estado inicial para alcanzar el objetivo: si queremos tomarnos esa copa de vino, una posible solución es tener un sacacorchos a mano y probar a abrir la botella.

Finalmente, en el proceso de resolución de cualquier problema es posible que tengamos que enfrentarnos a unas reglas que especifican cuáles son las operaciones que están permitidas, y que se conocen como límites o restricciones.

Dada esta naturaleza de los problemas, en el proceso de resolución podríamos distinguir, al menos, dos partes principales, la de *representación del problema*, en la que debemos construir un modelo del estado de cosas que representa el enunciado, y la *solución del problema* propiamente dicha, que consistiría en la aplicación del procedimiento apropiado (los *operadores matemáticos,* en el tema que nos ocupa) para alcanzar la meta final perseguida a partir de la situación de partida. No obstante, cada una de estas fases supone la ejecución correcta de una serie de pasos o tareas.

Como es obvio, en los diferentes tipos de problemas matemáticos que pueden plantearse, tales tareas no se dan en compartimentos siempre independientes y perfectamente distinguibles unos de otros; bien al contrario, las lindes entre ellos suelen ser difusas durante el proceso mismo de la resolución del problema; así, la planificación y la ejecución pueden presentarse juntas dado que, en ocasiones, no podemos estar verdaderamente seguros de haber elegido la estrategia correcta hasta no haberla ejecutado y haber observado si se ha logrado hacerla funcionar.

(A) Fases en la resolución de problemas.

Además, cuando se resuelve un problema, no siempre se es consciente de que se está procediendo mediante una secuencia lineal que respeta el orden en que aquí se presentan las diferentes tareas sino que, por ejemplo, uno puede empezar por planificar la solución del problema antes de ser consciente de la traducción del problema mismo. Para resolver el problema de las prendas de vestir es posible que alguien, que haya desarrollado antes con éxito la estrategia de construir una tabla numérica de doble entrada y completar los datos que faltan, comience aplicando dicha estrategia aún antes de que sea consciente de los términos en que está definiendo el problema.

1*) La traducción del problema*. De los componentes mencionados, el pri-mero *(la traducción del problema)*, supone definirlo; es decir, transformar cada proposición del problema en una representación interna. Cuando traducimos un problema nos valemos de las ideas y conceptos elaborados por personas que ya se han enfrentado con problemas similares o, incluso, desarrollamos nuestras propias ideas y conceptos. La creación de unidades de medida tales como litros de gasolina por cada cien kilómetros, tasa de éxito en la universidad, índice de precios al consumo... son otros tantos ejemplos a propósito.

Veamos un ejemplo tomado de Bransford y Stein (*Solución IDEAL de problemas*; Editorial Labor), en el que el problema es el siguiente: *Un estudiante dedicó 22 horas de estudio a la preparación de sus exámenes de Lengua, Matemáticas e Historia. Si dedicó el doble de tiempo a Lengua que a Matemáticas y 3 horas menos a Historia que a Lengua, ¿cuánto tiempo dedicó a cada asignatura?*

Al traducir el problema, el alumno considera cada una de las materias de forma independiente, es decir, define el tiempo dedicado a la preparación del examen de Lengua como no vinculado con el tiempo dedicado a la preparación del examen de Matemáticas o al de Historia; consecuentemente, resuelve dividiendo las 22 horas entre las tres asignaturas mencionadas y, claro es, se equivoca.

Una forma diferente de traducir el problema es a partir de proposiciones que incluyan las relaciones entre los tiempos de preparación de dos asignaturas. Así, decimos que el tiempo dedicado a Matemáticas es L/2 (la mitad que el dedicado a Lengua) o que el tiempo dedicado a Historia es L-3 (tres horas menos que las dedicadas a Lengua).

2) La integración del problema. El segundo componente, la *integración del problema*, implica agrupar las proposiciones textuales del problema en una representación coherente. Esa representación que hace el alumno refleja su forma de entenderlo (p.e.: "*Es un problema de regla de tres simple*") y, por consiguiente, está asociada al conocimiento que posee acerca del tipo de problemas matemáticos que se le pueden plantear. El alumno, por tanto, utiliza su conocimiento esquemático para situar las proposiciones extraídas del enunciado del problema dentro de una de las categorías de problemas con las que ya ha tenido alguna experiencia previa.

Los investigadores conciben el esquema como una estructura de información modificable que representa conceptos genéricos almacenados en la memoria. En este sentido, los esquemas contienen una información prototípica sobre las situaciones experimentadas frecuentemente y se utilizan para interpretar nuevas situaciones y observaciones.

Supongamos que, en medio de la zaragata de la cena de fin de año, alcanzamos a oír en la televisión la siguiente noticia: *El toro no embestía al caballo ... el picador sobrepasó la raya ... el matador pagó una multa a la autoridad*.

Para poder entender un incidente como éste, bastante frecuente en las plazas de toros, la persona que escucha la noticia en la radio debe poseer un buen conocimiento sobre la lidia de reses bravas. Este conocimiento previo se representa en la memoria mediante un esquema que especifica las reglas del juego que deben observar las personas que participan en una corrida de toros, las funciones y cometidos que tiene cada uno (picador, subalternos, matador, presidente, etc.) en el desarrollo de la lidia y el tipo de situaciones que acontecen durante la misma.

La teoría de los esquemas supone que existen estructuras (*esquemas*) en la memoria para las situaciones repetidas que se experimentan, y que una función importante de los esquemas es la de construir interpretaciones de nuevas situaciones. Los objetos de un esquema pueden entenderse como variables o "*ranuras*" en las que puede acomodarse la nueva información. Si se rellenan suficientes ranuras de un esquema determinado, éste se convierte en activo. Un esquema activo puede guiar al sujeto en la búsqueda de información para rellenar las restantes ranuras pero, si esa información adicional no está disponible en el entorno, se rellenarán sus ranuras con la información normal de una situación determinada, se activarán sus procedimientos y se accederá a cualquier otro conocimiento que contenga.

En efecto, el esquema es una estructura prototípica que puede incorporar fenómenos observados, gracias a la cual las personas reaccionamos a menudo muy rápida y eficazmente ante nuevos estímulos. Así, en los diversos estudios pudo comprobarse que los alumnos eran capaces de categorizar los problemas de forma casi inmediata. Después de oír las primeras palabras de un problema como "*Un barco fluvial recorre 36 kms a favor de la corriente...*", un alumno puede decir: "¡Ya está! Éste es uno de aquellos problemas de corriente de ríos".

Otros investigadores, como Robinson y Hayes, han encontrado que los alumnos utilizan sus esquemas para hacer juicios acertados respecto a cuál es la información importante en un problema y cuál es la accesoria.

Si aplicáramos las conclusiones de estos investigadores a un problema como éste:

> *"Dos estaciones de ferrocarril distan 100 kilómetros. A la una del mediodía del domingo arranca de cada una de las estaciones un tren, cada uno de los cuales se dirige hacia el otro. En el instante en que los trenes arrancan, un halcón echa a volar en el sentido de la marcha del primer tren, hasta la máquina del segundo tren. Cuando el halcón alcanza el segundo tren, da media vuelta y vuela en dirección al primero. El halcón prosigue de igual modo hasta que los trenes se cruzan. Supongamos que ambos trenes viajen a la velocidad de 50 km/h. y que el halcón vuele a la velocidad constante de 200 km./h: cuando los trenes se crucen, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido el halcón?"* (Bransford y Stein, obra citada),

veríamos que en él resultan accesorias la mayoría de las informaciones (a la una del mediodía del domingo arranca de cada una de las estaciones un tren, echa a volar en el sentido de la marcha del primer tren hasta la máquina del segundo tren, cuando el halcón alcanza el segundo tren, da media vuelta y vuela en dirección al primero, el halcón prosigue de igual modo hasta que los trenes se cruzan,...); en cambio, son relevantes las informaciones relativas a la velocidad de los trenes y del halcón o la distancia entre estaciones.

Cuando un alumno utiliza un esquema equivocado para comprender un problema, tiene bastantes dificultades para hallar la solución correcta, al igual que cuando el alumno no posee el esquema de un tipo de problema determinado, bien porque no lo conozca o porque se trate de un tipo de problema poco habitual en su experiencia previa.

Por ejemplo, consideremos el problema del reloj y la pulsera, y analicemos algunas de las dificultades que pueden planteársele al alumno cuando no conoce este tipo de problemas.

El precio de la pulsera de un reloj es igual a la tercera parte del precio del reloj. El reloj con la pulsera cuesta 2.400 pesetas ?Cuál es el precio de la pulsera?

Una posible respuesta puede ser: 1/3 de 2.400 = 800. Por tanto, el reloj vale 1.600 y la pulsera vale 800. En este caso, no se ha interpretado correctamente la proposición "el precio de la pulsera ... es igual a la tercera parte del precio del reloj, dado que el precio del reloj debería ser igual al triple del precio de la pulsera (el inverso de 3 es 1/3) y con la solución aportada no lo es (1.600 no es el triple de 800).

Si el alumno hubiera conocido los problemas sobre múltiplos y divisores hubiera procedido de forma diferente. Así, utilizando dicho esquema diría: "Dado que el precio de la pulsera es igual a un tercio del precio del reloj, el precio del reloj será igual al triple del precio de la pulsera; el precio total incluye el del reloj y el de la pulsera y, por tanto, el precio de la pulsera es 1/4 del total. Por consiguiente 1/4 + 3/4 = precio total".

Existen muchos ejemplos de aplicaciones de esquemas inadecuados para resolver problemas. Algunas de las confusiones más frecuentes al seleccionar los esquemas a utilizar son: problemas de sumas por problemas de restas; problemas de m.c.m. por los m.c.d.; problemas de correlación por problemas de contraste, etc.

Por todo lo expuesto, cada vez está más extendida la idea de que se necesitan y, por ende, se usan esquemas cognitivos para integrar o comprender los problemas. Como hemos visto, esos esquemas representan modos ya experimentados de abordar un problema, que traemos de nuestra memoria para afrontar el mismo tipo de problema o uno similar al que alguna vez hemos resuelto. Integrar la información relativa a un problema requiere, sin duda, un conocimiento específico de los tipos de problemas.

En el ejemplo de la dedicación del estudiante a la preparación de los exámenes, que veíamos hace un momento, la tarea de integración requiere reunir las distintas proposiciones que afectan a las relaciones entre las horas invertidas en las asignaturas. Lo que el estudiante dedica a preparar sus exámenes es, en realidad, $L + L/2 + L-3$. Estamos utilizando un esquema que corresponde al de la resolución de una ecuación con una sola incógnita: $x + x/2 + x-3 = 22$.

3*) La planificación de la solución.* Un nuevo componente, *la planificación de la solución*, aborda el diseño de un plan para solucionar el problema, esto es, para resolver problemas se necesita poseer alguna estrategia acomodada a las propias exigencias de cada problema: tantear, hacer un dibujo que represente cosas y sus relaciones, pensar un problema más fácil, hacer una tabla o empezar por el final (se parte del resultado final y se van recorriendo los pasos pero al revés)... son algunas de las estrategias que los alumnos ya aprenden en el último ciclo de la Educación Primaria.

En matemáticas, nos valemos de estrategias generales aplicables a un sinfín de tipos de problemas (p.e. empezar por el final) y, desde luego, aprendemos a apoyarnos en estrategias desarrollados por otros para afrontar un tipo particular de problemas (p.e. los que se utilizan para encontrar el área bajo la curva normal).

Consideremos, en primer lugar, las estrategias generales que utilizamos al planificar la solución de un problema.

Una de ellas es la conocida como *pensar un problema más fácil* y consiste en considerar un problema que sea parecido al que tenemos, pero que sepamos hacer. Veamos el siguiente problema tomado de nuevo de la obra de Bransford y Stein: *Es usted el director de un campeonato de tenis, que ha de celebrarse próximamente. Se han inscrito 103 participantes en el torneo, que se juega por simple eliminación (en cuanto pierda una vez, el jugador queda eliminado). Si hace falta para cada encuentro una ficha de puntuaciones e incidencias, ¿cuántas serán necesarias, suponiendo que todos los jugadores comparezcan?*

Se trata de un problema del tipo N-1 y que puede resolverse más fácilmente si probamos primero una situación concreta más sencilla como p.e. N = 3. De este modo, podemos comprobar que siempre se necesita un número de fichas de puntuaciones e incidencias menor (una unidad) que el total de participantes.

En el problema "*El cociente de dos números es 3 y su suma 72, ¿qué números son?*", la estrategia más adecuada podría ser el tanteo; en cambio, en el problema *"Teresa compra un lote de tres cuadernos en espiral tamaño folio y una mochila para ir al colegio por 1.344 pesetas. La mochila cuesta 297 pesetas más que el doble del lote de cuadernos ¿Cuál es el precio de cada cosa?"* (Matemáticas 6º Primaria. Editorial SM) la estrategia más adecuada podría ser la de empezar por el final (si a 1.344 le restamos 297, queda el precio de tres lotes iguales de cuadernos).

Respecto a las estrategias específicas, habría casi tantas como tipos de problemas puedan identificarse en matemáticas. Veamos como muestra un problema en 4º Curso de Primaria (Editorial Santillana): *Inés y Álvaro están haciendo una carretera para jugar a las chapas. Inés ha hecho 2 m y 48 cm. de carretera y Álvaro 1 m y 73 cm. ¿Cuántos centímetros de carretera han hecho en total?*

Por muy elemental que nos parezca el problema, para resolverlo un alumno necesita conocer la estrategia específica que le permite situar todas las medidas en una misma unidad y, por supuesto, necesita conocer que un 1 metro equivale a 100 centímetros. Veamos ahora un problema más complicado, que puede ayudarnos a entender mejor el concepto de estrategia específica:

> *Aplicamos una prueba de inteligencia a una muestra de 129 estudiantes universitarios de menos de 20 años y obtenemos una media de 28 y una desviación típica de 4,59. Igualmente aplicamos la misma prueba a otra muestra de 95 estudiantes universitarios comprendidos entre los 20 y 24 años de edad, y obtenemos una media de 25,36 y una desviación tipo de 5,07 ?Podemos afirmar a un nivel de confianza del 5% que la población de universitarios menores de 20 años es más inteligente que la de 20-24 años?*

Como habrá observado, se trata de un problema de comparación entre medias en grupos independientes y, para resolverlo, el alumno debe conocer la estrategia que le lleva a aplicar una fórmula de comparación determinada (z =

$*x_1 - x_2 * / s\ s^2/N1\text{-}1 + s^2/N2\text{-}1)$, a operar con un riesgo concreto a= 0.05 y a decidir en función del valor teórico encontrado para z.

***4) La ejecución de la solución*.** Esta última etapa implica que el alumno efectúe una serie de operaciones , que pueden ser tan simples como los implicados en la suma o tan complejos como los asociados al cálculo infenitesimal y, contra lo que pudiera pensarse en un principio, no es en absoluto un mero trámite; incluso cuando todo lo anterior ha sido correcto, hasta que ponemos en práctica la solución ideada no podemos estar completamente seguros de que las etapas anteriores se hayan cubierto de forma adecuada. Sólo al ejecutar la estrategia de resolución podemos verificar la adecuación del proceso seguido.

En la muy citada obra de Holt *How Children Fail*, que describe las conductas de los alumnos en la escuela y el tipo de actuaciones que les llevan a suspender en determinadas materias, se destaca que con frecuencia los alumnos no piensan demasiado en la estrategia a seguir para resolver un problema, así como que una vez hecha la elección la aplican a ciegas, sin verificación de ningún tipo.

Por ejemplo, uno de los chicos que Holt describe estaba trabajando en el siguiente problema: *Si tenemos 6 jarras y queremos verter en cada una 2/3 de libro de limonada, ¿cuánta limonada nos hará falta?* y respondió que18 litros. Holt le preguntó entonces "¿Cuánto hay en cada jarra?", a lo que respondió "¡Dos tercios de litro!". A continuación, Holt le preguntó si esa cantidad era mayor o menor que un litro y, tras decir el alumno que menos, le volvió a interrogar: "¿Cuántas jarras hay?", a lo que el chico contestó que eran 6. Cuando se le hizo observar que, si había seis jarras y todas contenían menos de un litro, la respuesta "18 litros" era absurda, el chico se limitó a encogerse de hombros: "¡Eso es lo que sale al calcularlo!".

Otros ejemplos parecidos tienen lugar cuando el alumno obtiene como media de un conjunto de valores otro valor superior a cualesquiera de ellos, cuando la probabilidad de un suceso aleatorio es superior a la unidad o cuando la suma de las partes superan al todo. Emplear el tanteo (cuánto puede dar esto) puede ser una estrategia adecuada para pronosticar una solución aproximada y verificar lo verosímil de la solución finalmente encontrada al problema.

(B) Conocimientos implicados en la resolución de problemas.

Cada uno de los componentes en la resolución de problemas requiere de una serie de conocimientos en el alumno.

La *traducción del problema* requiere algún conocimiento del lenguaje por parte del alumno que le permita, por ejemplo, transformar la proposición: *Juan tiene cinco duros más que Pedro*, en una relación cuantitativa entre las dos variables implicadas (Juan y Pedro), pero, también requiere de algún tipo de conocimiento general que permita al alumno, en el ejemplo, entender afirmaciones del tipo *Juan tiene un duro* como equivalentes a *Juan tiene cinco pesetas*.

Por su parte, la *integración del problema* demanda del alumno alguna forma de conocimiento estructurado que le ayude en su representación del problema, es decir, el alumno debe poseer cierto conocimiento esquemático del tipo de problemas que se le pueden presentar. Un esquema contiene una información prototipo sobre las situaciones que ya hemos experimentado con anterioridad y que, una vez recuperadas de la memoria, utilizamos para interpretar nuevas situaciones y observaciones. En el ejemplo, el alumno tiene que identificar el problema como un *problema de comparación* en el que deben compararse dos variables entre sí.

En la *planificación de la solución*, el alumno debe poseer algún conocimiento heurístico o estratégico de la resolución de problemas.

Finalmente, la *ejecución* de la solución demanda del alumno algún conocimiento sobre los procedimientos de solución, es decir, sobre los conocimientos algorítmicos. En nuestro ejemplo, el alumno tiene que saber sumar, de modo que pueda resolver que la suma de 3 +5 es igual a 8. Relacionado con el tipo de conocimiento necesario para resolver un problema está el de los distintos tipos de problemas de matemáticas a los que se enfrentan los escolares, como resultado de las exigencias que se derivan del propio currículum de educación primaria y educación secundaria.

De cara a la intervención con alumnos que tienen dificultad en la resolución de problemas, la mayor parte de los autores y programas existentes se centran en mayor o menor medida en cada una de estas tres fases. En general, y de cara a la práctica educativa convendrá tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

-Que el alumno comprenda el problema, antes de pensar en la forma de resolverlo, para lo cual es necesario que se acostumbre a leerlo varias veces y desentrañar cada uno de los conceptos del mismo.

-Que preste atención a las ideas fundamentales y las ordene según su importancia o en secuencias espacio-temporales.

-Que el problema a resolver se simplifique al máximo para hacerlo más comprensible, aplicando el principio científico de la parsimonia, redactándolo de una manera más sencilla, breve y comprensible.

-Que aprenda a analizar la estructura semántica subyacente a los problemas, ya que según como sea presentará niveles de dificultad distintos. En este sentido, generalmente se distinguen tres tipos de problemas (de cambio, combinación y comparación), siendo los de cambio los más fáciles y los de comparación los más complejos. De ahí que se insista en la necesidad de instruir al alumno en procedimientos a través de los cuales aprenda a realizar análisis y esquemas.

En cuanto a la evaluación de la resolución de problemas, pueden aplicarse colecciones de problemas del estilo de los mencionados para cada operación de cálculo, la que implicaría en el caso de los problemas de suma, una colección incluyendo:

a) Problemas que exigen los diferentes tipos anteriores de sumas para su resolución.

b) Problemas en donde los elementos objeto de adición son de diferente naturaleza (homogéneos, heterogéneos, magnitudes diversas).

c) Problemas que exigen diferentes vías de solución (una suma simple y directa, trabajo con números negativos, problemas que ofrecen distintas alternativas de solución posibles, problemas que exigen una respuesta diferente al algoritmo aritmético, problemas en donde debe inventarse un texto para una solución ofrecida...).

El empleo de tipo de colecciones respecto a los diferentes tipos de problemas debe completarse con una valoración explícita de los aspectos conceptuales del aprendizaje matemático: noción de número, concepto de decena, de centena, comprensión del sentido de las operaciones aritméticas, etc. En cualquier caso, lo que estos ejercicios deben permitirnos es averiguar en que fase de la resolución del problema aparecen las dificultades: traducción, integración, planificación o ejecución de la solución; con la finalidad de que sirva de punto de apoyo fundamental en el ajuste correspondiente del programa educativo.

2.5. Otros conocimientos matemáticos.

Aunque la investigación educativa se ha centrado principalmente en la numeración, cálculo y resolución de problemas, vamos a considerar, aunque sea muy brevemente los contenidos de las categorías restantes relacionadas con la estimación, el uso de instrumentos tecnológicos, fracciones y decimales, medida y geometría.

La estimación se refiere al ejercicio o capacidad de calcular el resultado de un problema antes de resolverlo, o mejor, es una forma de cálculo mental utilizada con frecuencia en la vida cotidiana. Además, juega un papel importante en los procesos de control de la propia actividad matemática el poner de relieve las incoherencias entre el cálculo realizado y el estimado. También es necesaria cuando sólo se pueda dar una respuesta aproximada, así como para resolver situaciones que demandan una rápida respuesta y no es posible realizar los cálculos exactos. Se lleva a cabo mediante:

-el redondeo o reformulación de los números para hacerlos más manejables,

-el ajuste o compensación para anular una operación, haciendo otra equivalente en dirección contraria y

-por selección de otra estrategia cambiando la estructura del problema, por ejemplo, si es de sumar por una multiplicación.

El dominio de las magnitudes (unidades de longitud, peso, superficie, volumen y sistema monetario) constituyen uno de los aprendizajes matemáticos de mayor utilidad práctica ya que forman parte de la vida cotidiana de manera habitual, y el alumno se va a ver condenado a uso. En dicho dominio inciden dos tipos de dificultades: de una parte, las derivadas de la ausencia de dominio de las operaciones básicas; y de otra, las que tienen relación directa con los conocimientos que implican cada una de ellas.

3. LAS DIFICULTADES EN LOS APRENDIZAJES MATEMÁTICOS

Aun cuando las dificultades específicas con los aprendizajes matemáticos son un motivo relativamente infrecuente de consulta y derivación en la Etapa Primaria, más marcada por los problemas relacionados con las dificultades en la lengua escrita, ello no supone que no haya problemas en este ámbito; simplemente, la debilidad de los aprendizajes adquiridos en matemáticas durante la etapa de los 6 a los 12 años suele manifestarse con más fuerza en la Secundaria, cuando el fracaso en el área aparece como el más notorio y escandaloso (aunque, todo hay que decirlo, no es un problema exclusivo de nuestro país).

Consecuentemente, contamos con una cierta cantidad de investigación acerca de las dificultades de aprendizaje en el área matemática; una investigación que a menudo se ha llevado a cabo desde perspectivas diferentes, cuando no enfrentadas, dependiendo de las teorías del aprendizaje en las que se apoyan, y aunque son muchas esas teorías, lo cierto es que la mayor parte de los trabajos se han realizado desde dos perspectivas: la neuropsicológica y la cognitiva.

Como en el caso de la lecto-escritura, la perspectiva dominante ha sido durante muchos años (y lo es todavía, en parte, en el ámbito profesional, aunque no en el investigador) la neuropsicológica, que relaciona las dificultades en estos aprendizajes con alteraciones en las funciones cerebrales y dispositivos básicos del aprendizaje, pudiéndose advertir, como en el lenguaje escrito, tanto una posición "fuerte" que asocia directa y contundentemente las dificultades en los aprendizajes matemáticos con alteraciones neurológicas más o menos concretas, por ejemplo, anomalías en la zona occipito-parietal, como otra más moderada que sitúa el origen de las dificultades matemáticas en déficits *en la maduración* .

Desde ambas posiciones, pese a sus diferencias, se supone que los aprendizajes matemáticos se edifican sobre una serie de funciones previas y más generales, como son la orientación espacio-temporal, el esquema corporal, las aptitudes visomotrices, etc.

3.1. El enfoque neuropsicológico.

La aparición de dificultades en los aprendizajes descritos son, casuísticamente, muy frecuentes en la Enseñanza Primaria, dado el conjunto de variables implicadas en el aprendizaje matemático que se comentaba en la introducción al tema. No obstante, desde el siglo pasado se han venido identificando individuos que presentan una dificultad específica para los aprendizajes de tipo aritmético, y si en un principio se trató de adultos que padecían tales trastornos como consecuencia de lesiones cerebrales adquiridas, pronto quedó en evidencia que ciertos niños y jóvenes presentaban alteraciones matemáticas conductualmente semejantes sin que existiera constatación posible alguna de lesión cerebral adquirida.

Términos como los de *acalculia* y *discalculia* se acuñaron para referirse con precisión y de manera particular a trastornos específicos del aprendizaje matemático no ocasionados por un déficit intelectual global, sino presentes en individuos de inteligencia normal y que han disfrutado de oportunidades socio-culturales y educativas apropiadas para adquirir tales aprendizajes; individuos, además, sin trastornos emocionales graves a los que poder atribuir la dificultad específica de aprendizaje, tal y como los describe el DSM en su definición de la dificultad específica del aprendizaje aritmético.

Como en el caso del trastorno específico de la lectura denominado *dislexia* (con el que frecuentemente se asocian algunos de los problemas matemáticos antes descritos), han sido muy diferentes las definiciones y explicaciones etiológicas propuestas en la literatura especializada. Así, los primeros investigadores y clínicos interesados por el problema hablaron de la acalculia como de un trastorno sintomático asociado bien a un déficit primario unido a una lesión cerebral adquirida (no coexistente con otras alteraciones del lenguaje ni del razonamiento), bien secundario a otros trastornos de base verbal o espacio-temporal.

Al generalizarse el tema al mundo de los niños sin lesión cerebral, se ha tendido más bien a hablar de *discalculia*, aunque -desde una orientación neuropsicológica- se ha mantenido la idea de su relación con alguna alteración neurológica no identificable por su alcance limitado (como «disfunción cerebral mínima») o, alternativamente, con la insuficiente «madurez» de algunas funciones neuropsicológicas supuestamente prerrequisito de los aprendizajes aritméticos. Para los defensores de esta interpretación, la discalculia es un trastorno estructural de las habilidades matemáticas debido a una alteración del substrato anatómico-fisiológico de las funciones vinculadas al aprendizaje matemático (audio-temporales, viso-espaciales...), la cual no afecta sin embargo al resto de las funciones mentales.

Tradicionalmente, y desde este enfoque, se han venido utilizando indistintamente los términos de discalculia o acalculia para hacer referencia a la dificultad para procesar números y realizar cálculos con ellos. Sin embargo otros autores utilizan el término de «acalculia» para referirse a trastornos adquiridos como resultado de una lesión cerebral, posterior a la adquisición de las habilidades matemáticas. Dentro de esta categoría se establecen, a su vez, dos modalidades: acalculia primaria y secundaria. En la acalculia primaria se presentan las dificultades sólo en el ámbito de las matemáticas, sin que existan alteraciones en otras funciones como el lenguaje, la memoria o las habilidades visoespaciales. En la acalculia secundaria las dificultades matemáticas van asociadas a trastornos en otras áreas, diferenciándose la acalculia secundaria atáxica (unida a alexia y/o agrafía de número) y acalculia secundaria visoespacial (unida a alteraciones visoespaciales. Por otra parte, utilizan el término de «discalculia» en referencia a la dificultad del alumno para comprender el número y dominar las combinaciones numéricas básicas y la solución de problemas.

Kosch, partiendo de esas posibles bases del aprendizaje matemático, propuso en los años setenta una clasificación muy difundida de diferentes subtipos posibles de discalculia, que podían presentarse aisladamente o en combinación:

1. *Verbal*: Incapacidad para comprender conceptos matemáticos y relaciones presentadas verbalmente.

2. *Pratognósica*: trastorno en la manipulación de objetos tal y como es requerida para hacer comparaciones de tamaño, cantidad, etc.

3. *Léxica*: Describe la falta de habilidad para entender símbolos matemáticos o números.

4. *Gráfica*: Discapacidad específica para manipular símbolos matemáticos mediante la escritura, es decir, para escribir números.

5. *Ideognósica*: Falta de habilidad para entender conceptos matemáticos y relaciones entre ellos, además de para efectuar cálculos mentales.

6. *Operacional*: Describe la falta de capacidad para efectuar operaciones aritméticas básicas de cualquier tipo, verbales o escritas.

Este mismo autor, en un estudio con 68 niños con DAM, encontró que el 35% de ellos mostraban signos menores de trastorno neurológico (dificultades de orientación derecha-izquierda, agnosia digital, etc.) sugiriendo lo que el denominó discalculia evolutiva.

Desde la perspectiva que estamos comentando en este apartado, se considera que el alumno con dificultades específicas para las matemáticas, *discalcúlico*, presenta un conjunto más o menos amplio de problemas añadidos, como son:

(a) Déficits perceptivos: Generalmente, con especial incidencia en el área perceptivo-visual y más concretamente, en las habilidades de discriminación, figura-fondo y orientación espacial.

(b) Déficit de memoria: En particular, en el funcionamiento y resultados de la memoria a corto plazo o memoria de trabajo, que dificulta mantener activas en el almacén de memoria informaciones durante un cierto tiempo... Algo, sin duda, problemático para la realización de operaciones mínimamente complejas y para la solución de problemas.

(c) Déficits simbólicos: Especialmente en el ámbito lingüístico general, pero que también se registran en las actividades de lectura y escritura.

(d) Déficit cognitivos que afectan a los procesos elementales de pensamiento: comparación, clasificación, deducción de inferencias, etc.

(e) Alteraciones conductuales: Como en la práctica totalidad de los individuos con trastornos específicos del aprendizaje, suele apreciarse la tríada hiperactividad/déficit atencional/impulsividad, unida a menudo a perseverancia.

Ana Miranda, resumiendo las descripciones de otros autores, concreta este conjunto de alteraciones en un «perfil típico» del sujeto con discalculia, el cual incluiría: déficit en la organización viso-espacial e integración verbal; déficits en la integración del esquema corporal; apraxia viso-motriz; problemas de orientación en el análisis y representación de las relaciones espaciales; déficits de la percepción y el juicio sociales; dificultades para hacer estimaciones de tiempo y distancia; desequilibrio a favor de las capacidades verbales frente a las no verbales en escalas de inteligencia tipo Wechsler.

3.2. El enfoque cognitivo.

El estudio e investigación de los aprendizajes matemáticos desde la perspectiva neuropsicológica tradicional ha recibido en los últimos años, abundantes críticas, siendo las más importantes las siguientes.

En primer lugar, se critica el hecho de que careciendo de una definición operativa, rigurosa y universalmente aceptada de "dificultades específicas de aprendizaje" se parta de una definición descriptiva, realizada en términos negativos (son alumnos que *a pesar de* mostrar una inteligencia normal, *no* tener problemas emocionales, *ni* deficiencias sensoriales, tienen un rendimiento es-colar pobre, definido por las bajas puntuaciones en pruebas de rendimiento y, naturalmente, por las calificaciones escolares) y se llegue a una definición positiva: las conciben como una "entidad", como algo que el niño "tiene" y que probablemente esté causado por alguna alteración neurológica.

La segunda crítica tiene que ver con la relación que se establece entre dificultades matemáticas y los "signos neurológicos menores" insistiendo la mayoría de los investigadores en la ausencia de demostración de dicha relación. Y es que dicha relación se establece, mayoritariamente, a partir de estudios de carácter correlacional, con lo inadecuadas que pueden resultar las conclusiones derivadas exclusivamente de estudios de esa índole.

En tercero, se critica el que los estudios se basen en concepciones superficiales de las actividades matemáticas en lugar de en una teoría fundamentada de la competencia matemática, empleándose tareas inadecuada para la medida de ésta. Resulta algo más que anecdótico que la mayoría de los estudios neuropsicológicos no profundice en los procesos cognitivos implicados en cada uno de los aprendizajes matemáticos.

Finalmente, se ha criticado la escasez y debilidad metodológica de los estudios neuropsicológicos sobre la discalculia.

En resumen, pues, y en el mejor de los casos, como señalara Rivière hace más de una década, "conviene guardar una prudente reserva antes de trasladar el modelo de lesión o disfunción a los niños que encuentran difícil adquirir representaciones matemáticas o habilidades de cálculo en la escolaridad normal (a diferencia de los adultos con lesiones, que pierden las capacidades previamente adquiridas). Sin negar que pueda existir un grupo reducido de ellos con algún trastorno neurológico subyacente, no hay pruebas para aceptar la idea de que éste se produce en todos los niños con dificultades específicas para el aprendizaje de las matemáticas".

Desde el enfoque alternativo a estas viejas teorías sobre las DAM, se considera en términos generales que tanto para el aprendizaje de las matemáticas, como para remediar las dificultades se debe de instaurar una enseñanza que esté en correspondencia con los procesos cognitivos que subyacen a la ejecución de dichos aprendizajes. En este sentido, hay que tener en cuenta que la competencia matemática sigue un proceso de construcción lento y gradual que va de lo concreto a lo abstracto y de lo específico a lo general, de tal manera que la habilidad matemática es susceptible de descomponerse en una serie de habilidades entre las que podemos distinguir la numeración, el cálculo, la resolución de problemas, la estimación, el concepto de medida y algunas nociones de geometría, habilidades que a su vez pueden, y deben, descomponerse en cada uno de los procesos y estrategias que se emplean en su ejecución.

Asimismo, se suele llamar la atención de la importancia que poseen para la adquisición de los aprendizajes matemáticos algunos procesos cognitivos como:

a) La *atención*. Una cuestión crucial en la operatividad matemática es la exigencia de poseer estrategias que faciliten la acumulación momentánea de recursos atencionales dedicados exclusivamente a la tarea matemática que se ejecuta. Hasta las tareas matemáticas más simples (p.e.: intente seguir leyendo y realizar mentalmente la operación 27 + 15) exigen suspender temporalmente otras tareas que estemos realizando para de esa manera ahorrar "recursos atencionales" que puedan dedicarse a la resolución de la tarea en cuestión. Es obvio, que una manera importante de "ahorrar" este tipo de recursos es mediante la automatización de todos los procesos posibles en cada caso (tablas de multiplicar, algoritmos de las operaciones aritméticas, etc.)

Los recursos atencionales que se "ahorran" al centrar la atención en la tarea matemática van a posibilitar los procesos de recuperación y almacenamiento de información en la Memoria de Trabajo y en la Memoria a Largo Plazo.

La realización de tareas matemáticas exige una distribución adecuada de los recursos de procesamiento mental y memoria así como el empleo de estrategias ordenadas y jerarquizadas, que implican un encaje progresivo de unos procedimientos en otros: la acción de sumar, implica necesariamente la de contar.

Es bastante probable que una parte de los alumnos o alumnas que presentan dificultades en las matemáticas posean estrategias inadecuadas en el "ahorro" de esfuerzos cognitivos y su posterior redistribución para la realización de los diferentes subprocesos que componen cada tarea matemática.

b) La *memoria*. Como han señalado prácticamente todos los investigadores cognitivos, los diferentes tipos de memoria y especialmente la memoria de trabajo *(working memory),* juegan un papel trascendental en la realización de la mayor parte de los procesos intelectuales. En la memoria de trabajo es posible realizar, al menos, las siguientes operaciones: de un lado, sirven de almacén donde se "guardan" los resultados parciales de las operaciones cognitivas que realizamos, y que en el caso de los aprendizajes matemáticos son especialmente abundantes (en cualquier operación de cálculo es necesario "guardar" los resultados obtenidos en cada una de las columnas de cada "cuenta"); de otro, sirve de almacén temporal para la información recuperada de la MLP (Memoria a Largo Plazo); o sirve de escenario para la conjunción entre la nueva información (adquirida) y la recuperada de la MLP.

La importancia de la Memoria en los aprendizajes matemáticos, además de por los datos empíricos, viene demostrada por estudios como los de Russell y Ginsburg, que afirman que el funcionamiento cognitivo de los niños con dificultades específicas para el aprendizaje de las matemáticas es normal, si se exceptúa su pobre conocimiento de hechos numéricos.

Esta idea, sobre la importancia de la memoria se ha visto reforzada por otras muchas investigaciones que establecen de una manera clara que la dificultad de los niños que poseen dificultades específicas en los aprendizajes matemáticos para operar con información de carácter numérico debido al carácter de "dominio específico" de la Memoria de Trabajo, que llevaría a que algunas personas tuvieran un procesamiento desigual dependiendo del tipo de estímulo que se utiliza (verbal o numérico).

De lo anterior, puede derivarse la importancia de poseer estrategias adecuadas para la recuperación, almacenamiento y manipulación de la información en los diversos niveles de la Memoria. Cuestión que muy probablemente se encuentre entre los orígenes de las dificultades matemáticas de muchos alumnos y alumnas.

c) Los *conocimientos previos.* Estos conocimientos juegan un papel importante en cualquier actividad intelectual (son los que posibilitan la construcción de los nuevos aprendizajes, así como la ejecución de los mecanismos de aplicación), pero resultan de una especial relevancia en el ámbito matemático.

¿Por qué son tan "importantes" los conocimientos previos en la ejecución de las tareas matemáticas?:

- Primero, porque a partir de un determinado nivel de aprendizajes matemáticos, estos van perdiendo la conexión con el mundo concreto y se constituyen en una "abstracción" desvinculada de las intenciones y metas del que aprende: tienen que superar su tendencia a hacer depender las relaciones de la intenciones para comprender las relaciones matemáticas.

- Segundo, porque mientras en otras áreas los conocimientos tienen esencialmente un carácter declarativo, en las matemáticas resultan clave dos tipos de conocimientos previos: los *declarativos* (conceptos de las operaciones, tipo de números, etc.) y los *procedimentales* (algoritmos de las diferentes operaciones, estrategias de solución de problemas...).

- Y tercero, porque los conocimientos matemáticos tienen un elevado nivel de interrelación y jerarquización.

El elevado nivel de abstracción, jerarquización e interrelación del conocimiento matemático junto con el doble carácter del conocimiento previo necesario para realizar tareas matemáticas, posibilitan el que los "bloqueos" en las tareas de este área sean más abundantes que en otras áreas del conocimiento.

La existencia de conocimientos previos y de las estrategias adecuadas para su recuperación de la MLP aparecen de esta manera como un elemento central en la adquisición y desarrollo de las habilidades matemáticas.

Consecuentemente y desde esta perspectiva, se aportan una serie de principios bien establecidos que pueden aplicarse a las situaciones educativas concretas en el proceso enseñanza-aprendizaje:

1. Para el conocimiento matemático el alumno tiene que ser capaz de establecer relaciones conceptuales, lo que le conducirá a nuevas elaboraciones y reestructuraciones del conocimiento, ya lograr las representaciones cognitivas adecuadas.

2. Los conocimientos previos constituyen la base para la adquisición y comprensión de los nuevos. De manera que, la conexión e integración del conocimiento previo con el nuevo es lo que dará lugar a las reestructuraciones y representaciones, ricas y complejas.

3. Tanto el conocimiento declarativo (conocimiento de los conceptos matemáticos) como el procedimental (conocimiento de las estrategias y habilidades matemáticas) deben ser enseñados explícitamente, porque el conocimiento formal no produce automáticamente competencia procedimental.

4. Considerando las limitaciones de la capacidad de procesamiento del alumno es necesario adquirir los automatismos elementales relacionados con las operaciones básicas (+, -, x, y :) para liberar recursos cognitivos que puedan ser utilizados en tareas de orden superior como el control de la ejecución matemática y la interpretación de los problemas.

5. La competencia matemática se logra aplicando los conocimientos adquiridos a los distintos contextos en los que se desenvuelve el alumno, superando así la fase de acumulación de conocimientos aislados y descontextualizados.

6. Los procesos metacognitivos de control y guía de la propia actividad tienen mucha importancia en la ejecución competente. Esta importancia es menor en las fases iniciales, en las que predomina la regulación externa.

7. Precisamente porque el análisis de los errores sistemáticos constituyen muchas veces las únicas ventanas de acceso a las mentes de los alumnos, el estudio de estos errores pone de relieve que se aplican principios, reglas o estrategias incorrectas por su parte.

8. Los procesos motivacionales y sociales desempeñan también un importante papel, en cuanto que son factores que favorecen o entorpecen el aprendizaje por el efecto circular que provoca el éxito o fracaso experimentado. Así, muchos fracasos iniciales conducen al alumno a evitar implicarse y a desarrollar actitudes negativas hacia

las matemáticas, entrando en una circularidad negativa de difícil solución.

3.3. Algunos factores básicos en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas.

Aunque a partir de los conocimientos actuales sólo se pueden dar respuestas parciales e incompletas acerca de cuáles son los factores que inciden en el elevado fracaso en este área, en un capítulo como éste es inevitable hacer referencia, si no a las "causas" de las DAM, sí a toda una serie de variables que influyen de manera decisiva en ellas; unas inherentes a la propia naturaleza de las matemáticas, otras relacionados con las creencias y expectativas existentes por parte de alumnos, padres y profesores con respecto a estos aprendizajes, un tercer grupo relacionado con las formas de enseñanza y, finalmente, otras centradas en el propio alumno.

No obstante, la descripción de los factores de esa diversa índole relacionados con las DAM, que hacemos a continuación no debería servir para explicar las dificultades concretas que un alumno en particular presenta en un momento determinado; en la medida en que, en cada caso, tales dificultades son el resultado de una compleja *ecuación causal* en la que cada factor concreto posee unos valores propios y específicos, las siguientes líneas sólo pueden ayudarnos como una especie de esquema general para la exploración individualizada del caso (especialmente, si tenemos en cuenta que con los instrumentos de medición existentes es imposible establecer con un nivel de credibilidad aceptable, el peso relativo de cada factor en una situación concreta).

(A) Factores relacionados con los alumnos

Desde el enfoque neuropsicológico, se busca determinar la existencia de trastornos neurológicos en los alumnos con DAM y se asume que pueden ser debidas a un desorden estructural congénito de las zonas cerebrales concernidas por las habilidades matemáticas, principalmente del hemisferio derecho.

Son numerosos los estudios, llevados a cabo, y las críticas a los mismos que se han realizado desde todos los frentes por lo que, sin negar que la presencia de ciertas alteraciones neurológicas puedan acompañar a las DAM (Dificultades en Aprendizajes Matemáticos), resulta arriesgado establecerlas como causa, y más si es causa única. En las DAM que presentan muchos alumnos no se aprecia correlato neurológico alguno.

Desde el enfoque cognitivo y en relación con la problemática centrada en el sujeto, las DAM se relacionan, en general, de la misma manera que con los problemas de lectoescritura, con representaciones internas y estrategias cognitivas inadecuadas que se producen indistintamente en la entrada, procesamiento y/o salida de la información, tal y como hemos analizado más detenidamente en capítulos anteriores, en relación con este enfoque.

De forma más específica, se han considerado como factores responsables de las diferencias en la ejecución matemática a la actividad perceptivo motora, la organización espacial, las habilidades verbales, la falta de conciencia de los pasos a seguir y los fallos estratégicos. También se han considerado las dificultades de pensamiento abstracto, el lenguaje o la lectura, la falta de motivación, la lentitud en la respuesta o los problemas de memoria para automatizar las combinaciones numéricas básicas.

Aunque los alumnos suelen aparecer como el único factor de este tipo de dificultades, como vamos a ver continuación, a ello sólo es atribuible lo siguiente , según Rguez. Ortiz (*La intervención psicoeducativa en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas.* Apuntes de psicología, 93, 79-107):

1) El dominio de los recursos. El aprendizaje matemático implica el conocimiento de conceptos y métodos matemáticos que dependen de la historia acumulada de aprendizajes del alumno en el área, condicionada a su vez por aspectos como su estilo de aprendizaje, el material empleado, las estrategias de enseñanza seguidas, etc. Los problemas más frecuentes en relación con este factor son:

- El desconocimiento acerca de cuándo deben ser aplicados estos conocimientos adquiridos, lo que puede llevar a no usarlos cuando se precisa y a usarlos cuando no es adecuado.

- La aplicación del conocimiento disponible sólo en aquellas actividades y aprendizajes que lo demandan explícitamente.

- Déficits en ese conocimiento, cuando es de tipo semántico, que dificulta la comprensión de las nuevas tareas.

- Déficits en ese conocimiento, cuando es de tipo procedimental, que pueden interferir con el aprendizaje de nuevos procedimientos.

2) Manejo de heurísticos. Los heurísticos son estrategias generales de resolución de problemas, carentes de contenido matemático específico, pero que aumentan la posibilidad de aplicar adecuadamente el conocimiento disponible en situaciones problemáticas. Son un complemento necesario para el correcto aprendizaje matemático, pero fallan a menudo en los alumnos por los inadecuados planteamientos de la educación matemática (poco reflexiva, demasiado apegada a la adquisición de rutinas).

3) Procesos de autorregulación. Estos procesos son los responsables de que el alumno tenga conciencia de sus propios conocimientos, así como del aprendizaje independiente y de la realización autónoma de tareas (matemáticas y de otro tipo). Su carencia o disminución hace que el alumno:

- No perciba cuáles son los recursos apropiados de que dispone para afrontar la resolución de una tarea.

- Se muestre inflexible cuando debe abandonar una estrategia o punto de vista que le está dificultando una ejecución apropiada.

- No ponga en juego las destrezas de verificación necesarias para comprobar los resultados a los que llega.

- No sepa por qué emplear un procedimiento, aunque sepa que debe emplearlo, ni -por tanto- autovalorar la adecuación de la aplicación del mismo.

- Actúe de manera rutinaria y no reflexione en la realización de las actividades de enseñanza-aprendizaje que se le proponen.

4) Las creencias, actitudes, emociones y motivaciones. Últimamente se ha incrementado la investigación que pone de relieve la gran importancia de estos factores en el enfoque (superficial, profundo, estratégico) de aprendizaje que adopta el alumno frente a los contenidos, así como en su manera de utilizar los conocimientos adquiridos. En cualquier caso, ese mismo cuerpo de investigadores tiende a poner de relieve que las concepciones previas y motivaciones del alumno no son sólo responsabilidad de éste, sino que dependen estrechamente de las estrategias y estilos de enseñanza que se le dirija, así como de la significatividad personal de los contextos y situaciones de enseñanza-aprendizaje.

(B) Factores relacionados con la tarea o la naturaleza propia de la matemáticas.

Todas las asignaturas, especialmente las matemáticas entrañan dificultades, si no se da un cierto dominio o capacidad relacionada con habilidades como la abstracción y la generalización, la comprensión de los conceptos y su estructura jerárquica, así como un relativo dominio de su carácter lógico y su lenguaje específico.

La construcción de las matemáticas ha implicado el desarrollo de conceptos cada vez más abstractos y desligados de representaciones habituales. En este sentido, el conocimiento matemático intenta reflejar lo esencial de las relaciones eliminando las inferencias, el contexto o las situaciones particulares, de ahí su carácter eminentemente abstracto. Por otra parte, y unido a la abstracción, la generalización constituye también otro factor importante del conocimiento matemático a través del cual se tiende a buscar y utilizar conceptos. Leyes o teoremas lo más generales posible. La dificultad se plantea cuando los alumnos perciben las características particulares de algo como parte integral de las ideas o conceptos asociándolos naturalmente con ellos. Por eso, uno de los objetivos del desarrollo matemático es conseguir que el alumno aprenda a despojarse de lo no esencial, quedándose con lo abstracto y fundamental.

Otra dificultad se deriva de la complejidad de los conceptos matemáticos, por lo que el profesor tiene que realizar actividades y utilizar estrategias de aprendizaje que permitan al alumno conocer y desentrañar el concepto mediante una programación apropiada. Para ello, es frecuente el uso de analogías y la abstracción. Una de las funciones de la analogía es hacer disponibles las ideas relevantes y estimular al alumno a integrar activamente la nueva información con la anterior aprendida. De esta manera se convierten los contenidos informativos en algo más imaginativo y concreto. Por otra parte, dada la tendencia del alumno a fijarse en aspectos y variaciones de los contextos en que se presentan los conceptos matemáticos, hay profesores que consideran que la simplicidad de la idea matemática se capta mejor exponiéndola sola. Es decir, se trata de alejar los conceptos matemáticos de las experiencias significativas de los alumnos, porque el nivel de abstracción que se necesita para llegar a la pretendida simplicidad puede estar fuera de su alcance.

Además del nivel de abstracción y la complejidad, los conceptos matemáticos tienen una estructura jerárquica y una organización lógica precisa. Por ello, los aprendizajes matemáticos constituyen una cadena en la que cada conocimiento se apoya en el anterior. Este carácter lógico de la disciplina tiene que ser adaptado a las características evolutivas del pensamiento del alumno individual y colectivamente para no plantear objetivos por encima de sus posibilidades. Este ha sido un error muy frecuente en la enseñanza de esta disciplina.

El carácter lógico (deductivo formal) de las matemáticas se ha considerado como una de las principales dificultades en su aprendizaje. Y el hecho es que la falta de atención sobre el pensamiento lógico es muy frecuente por lo que se constituye en uno de los orígenes de las DAM. Una de las dificultades más frecuentes desde los aspectos formales es el de las formas de notación y el uso de las reglas en sí mismas. Al principio, estas deben ser justificadas por su significado pero, en la utilización habitual, son las formas de notación las que determinan la elección de las reglas. Y, a su vez, el uso forma de la notación puede llevar al uso de reglas sin fundamento, a una manipulación sin significado; no obstante, la manipulación formal deberá seguir siendo una característica esencial de las matemáticas.

Finalmente, el desconocimiento del lenguaje matemático genera también dificultades de aprendizaje, en cuanto que en esta materia se utiliza un lenguaje formal muy distinto al lenguaje natural que se usa habitualmente. De ahí que el lenguaje natural en contextos matemáticos pueda generar confusiones en cuanto que su flexibilidad y amplitud interpretativa choca con el lenguaje matemático, caracterizado por su rigor, exactitud y formalidad. El lenguaje matemático traduce el lenguaje natural a un lenguaje universal formalizado que permite la abstracción de lo esencial de las relaciones matemáticas implicadas, así como un aumento del rigor y la exactitud que viene dada por la estricta significación de los términos.

El dominio del lenguaje matemático requiere la comprensión de un significado formal intrínseco en el que unos símbolos hacen referencia a otros dentro de un código específico y un significado pragmático que permite la traducción al lenguaje natural y al mundo real. Al alumno le resulta difícil coordinar ambos significados. En definitiva, las dificultades más frecuentes relacionadas con el lenguaje y la lectura en matemáticas son debidas a la complejidad sintáctica del lenguaje utilizado, a la utilización de un vocabulario técnico, a la utilización de notación matemática y a la dificultad de relacionar las matemáticas con el contexto.

Rodríguez Ortiz relaciona con el currículum matemático, los siguientes factores:

> 1) *Factores relacionados con los contenidos*. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas no se pueden comprender sin tener en cuenta aspectos como su naturaleza esencialmente abstracta, que es el resultado de un largo proceso de elaboración histórica; la naturaleza jerárquica del proceso de aprendizaje que exigen (cada nueva adquisición descansa en una adquisición sólida de otras anteriores: de ahí la manifestación en secundaria de muchos problemas que se gestaron en primaria); las peculiaridades del lenguaje matemático, un verdadero sistema simbólico con reglas propias, con conceptos complejos, de un lado, y términos también empleados con otro sentido en el lenguaje ordinario, de otro, factores ambos que complican el proceso de aprendizaje adecuado.
>
> 2) *Los métodos de enseñanza*. De los métodos más habituales en el área priman los aprendizajes pasivo-receptivos, sin tener en cuenta los procesos de aprendizaje comprensivo del alumno, al tiempo que adoptan un enfoque rutinario de los procedimientos. En primaria, se descubren los conceptos y el uso reflexivo de los procedimientos, el «pensamiento matemático»; en secundaria, se sigue habitualmente un enfoque deductivo rígido (exposición de un concepto o principio «-ilustración del mismo con un ejemplo-» problemas de control de comprensión- problemas de consolidación). Estas dificultades, por otra parte, se incrementan por la escasez de recursos empleados para favorecer la comprensión matemática auténtica y la elaboración de nociones y principios abstractos.
>
> 3) *La evaluación*. Como en el resto de las áreas, suele ser el «pariente pobre»; se evalúa sólo la ejecución de los alumnos, se hace de manera puntual y asistemática, y se valoran sólo a petición de principios y conceptos, y la ejecución mecánica de procedimientos aprendidos como algoritmos.

(C) Factores relacionados con el contexto educativo.

Tradicionalmente existen creencias y actitudes, procedentes del mismo campo educativo, que tienen una influencia negativa en el aprendizaje y que llegan a generar ansiedad y trastornos socioemocionales.

Las percepciones y actitudes que con mayor frecuencia se observan en los alumnos sobre la naturaleza de las matemáticas, son descritas como fijas, inmutables, externas, abstractas y que no están relacionadas con la realidad: un conocimiento cuya comprensión está reservada a muy pocos, una colección de reglas y hechos que deben ser recordados y una ofensa al sentido común en algunas de las cosas que asegura, ya que no tienen por qué tener sentido; un área en la que se harán juicios no sólo sobre la capacidad intelectual, sino también sobre la propia valía personal.

Esta actitud se deriva, en parte, de las tendencias formalistas de la enseñanza tradicional, basada más en la manipulación sintáctica de los símbolos y reglas que en el significado de los mismos. Sin embargo, cuando se enseña el uso adecuado de las reglas, los alumnos desarrollan la confianza en sí mismos y la motivación para el logro.

Independientemente de las actitudes previas sobre las matemáticas, que existen tanto en la mentalidad de los padres y de los alumnos, como en la de los profesores, vamos a considerar algunos factores explicativos de las DAM que se encuentran en el propio contexto educativo, como los procedimientos didácticos y la programación inadecuada de los contenidos.

Los contenidos suelen estar estructurados en torno a objetivos, que habrá que conseguir en los diferentes niveles escolares, adaptando los programas a las características del alumno, especialmente cuando presenta algún problema de maduración o lentitud de aprendizaje. Por ello, es fundamental conocer si hay ausencia de conocimientos previos o dominio de los anteriores, si el nivel de abstracción es el adecuado y si se da por parte del alumno la capacidad suficiente para abordar los contenidos que se proponen. Las dificultades se presentarán bajo diversas modalidades cuando los conocimientos, sobre todo los básicos, no están bien comprendidos y cuando los niveles de abstracción y competencia cognitiva sean inadecuados. Cubrir unos objetivos sin haber resuelto suficientemente estos prerrequisitos es conducir al fracaso seguro al alumno en esta disciplina.

Las metodologías inadecuadas en cuanto a la exposición de los contenidos y al ritmo de trabajo establecido es otra de las posibles causas externas de las DAM. La exposición poco clara y fuera del contexto del alumnado, la ausencia de ejemplos y ejercicios que ilustren las explicaciones, la ausencia de supervisión del progreso del alumno y la utilización de un lenguaje poco comprensible, son algunos de los errores metodológicos que generan fracasos en este ámbito. Por otra parte, podemos encontrar toda una serie de dificultades o limitaciones centradas en el ritmo de trabajo. Intentar compatibilizar la consecución de los objetivos del curso con la adaptación a las características propias del grupo de clase requiere establecer un ritmo que se ajuste a la evolución y progreso de los alumnos sin forzar demasiado, pero sin detenerse más de lo necesario, con suavidad y al mismo tiempo con fortaleza.

Rodríguez Ortiz señala como factores del contexto de enseñanza, los siguientes elementos:

> a) El proceso de aprendizaje matemático se concibe como un proceso unidireccional de conocimientos «empaquetados», sin dar lugar a una interacción social y cognitiva auténtica entre implicados y entre estos y los contenidos, lo que dificulta una verdadera elaboración de aprendizajes significativos, sustituidos por la apropiación mecánica de formulaciones verbales carentes de significado y de «rituales» de actuación.
>
> b) En los contextos habituales de enseñanza-aprendizaje, unidireccionales, como hemos dicho, toda la situación está en manos del profesor, lo que favorece la creación de aprendices pasivos y sin capacidad para autorregular su aprendizaje.

c) Esos mismos contextos, en donde el alumno se somete a actividades que no comprende, con fines ignotos para él y sin interacciones sociales, facilitan también la aparición de actitudes de rechazo ante la materia: en el «ranking» de las más odiadas aparecen las matemáticas en lugar destacado como el fracaso en su aprendizaje.

Y entre los factores asociados al profesor, se han investigado la influencia en el fracaso matemático, que ejercen los siguientes:

1) *La formación matemática del profesor*. Se considera uno de los aspectos más deficitarios, tanto en primaria como en secundaria. En Primaria, porque se descuida una comprensión verdadera de los conceptos y métodos matemáticos, en favor de aprendizajes rutinarios y mecanicistas, de modo que se hace difícil que un profesorado así formado pueda contribuir a una verdadera educación matemática; en secundaria, porque no existe nada para dotar a los futuros profesores (incluso, a los profesores en ejercicio) del conocimiento psicopedagógico necesario para aprender a ayudar a otros a aprender matemáticas.

2) *Creencias y actitudes de los profesores*. Las «concepciones previas» no son algo de los alumnos, sino una variable presente en la explicación del comportamiento de todo individuo: un profesor enseña de uno u otro modo no sólo en función de su información, sino también -sobre todo- en función de sus creencias sobre la materia que imparte, la capacidad de sus alumnos, el papel de su materia en la formación de estos, etc. De hecho, una de las razones más frecuentes para explicar el fracaso matemático de los adolescentes es, sencillamente, que son «demasiado difíciles y no están al alcance de todos».

PARA SABER MÁS

Para profundizar en la cuestión, incluimos a continuación una serie de referencias bibliográficas que, necesariamente, es un tanto arbitraria, aunque hemos procurado incluir en nuestra lista obras tanto teóricas como aplicadas y representativas de tendencias diferentes.

- ALSINA, C. Y OTROS. (1996): *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Grao.
- ALLER, C. Y PÉREZ, P. (1998): *Cuentos de los primeros números*. Sevilla: Quercus.
- ASHMAN, A. y CONWAY, R.N.F. (1990): *Estrategias cognitivas en E.E.* Madrid: Santillana.
- BAROODY, A. (1988): *El pensamiento matemático de los niños.* Madrid: Aprendizaje-Visor/MEC.
- BRISSIAU, D. (1993)*: El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.

- CASCALLANA, M. T, (1988): *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos.* Madrid: Santillana.
- CASTRO E. Y OTROS (1987): *Números y operaciones.* Madrid: Síntesis
- CORBALÁN, F. (1995): *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Barcelona: Grao
- DICKSON, L. Y OTROS (1991): *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor-MEC.
- GIMÉNEZ, J., Y GIRONDO, L. (1993): *Cálculo en la escuela.* Barcelona: Grao.
- HERNÁNDEZ, F., Y SORIANO, E. (1999): *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria.* Madrid: La Muralla.
- KAMII, C. K. (1995): *Reinventando la aritmética.* Madrid: Visor.
- LUCEÑO, J. L. (1986): *El número y las operaciones.* Alcoy: Marfil.
- MACNAB, D. S., Y CUNMINE, J. A. (1982): *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad*. Madrid: Aprendizaje Visor.
- MARTÍNEZ MONTERO, J. (1991): *Numeración y operaciones básicas en la Educación Primaria.* Madrid. Escuela Española.
- MARTÍNEZ MONTERO, J. (2000): *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona: CISS-PRAXIS.
- MAZA, C. (1989): *Sumar y restar.* Madrid: Visor.
- MAZA, C. (1991): *Enseñanza de la multiplicación y división.* Madrid: Síntesis.
- MAZA, C. (1991): *Enseñanza de la suma y de la resta.* Madrid: Síntesis.
- MIRANDA, A., Y OTROS (1998): *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas.* Archidona: Aljibe.
- PORRAS, R., Y GARCÍA, I. (1995): *Fichero autocorrectivo de cálculo y problemas.* Madrid: EOS.
- PUIG, L., Y CERDA, F. (1988): *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.
- RESNICK, L. B., Y FORD, W. W. (1990): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Madrid: MEC-Paidós.
- STACEY, K., Y GROVES, S. (1999): *Resolver problemas: estrategias. Unidades para desarrollar el razonamiento matemático*. Madrid: Narcea.
- WHIMBEY, A., Y LOCHHEAD, J. (1993): *Comprender y resolver problemas.* Madrid: Visor.